ROBINSON ET VENDREDI (SUR L'ILE DES EQUATIONS PERDUES)

Hugo FRELAT, Joséphine HADENGUE, Clarisse LALANDE, Bastien LETTERON, Simon MACHADO, Thomas SCHVERTZ-GODON, Bastien TREMEAU, Alex PASDELOUP, Titouan WEILLER

Élèves de première

Année 2023 - 2024

Établissement : Lycée Marguerite de Navarre à Bourges (18)

Professeurs / Encadrant(e)s : Olivier CRECHET, Aurélie FIEVEZ, Nathalie HERMINIER, Guillaume PELLETIER, Amélie ROCHE-HERNANDEZ

Chercheur(s) / Chercheuse(s) : Loïc BESNIER, Xavier BULTEL, Amandine LEFEBVRE et Benjamin NGUYEN Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans (LIFO) | INSA Centre Val de Loire.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PRESENTATION DU SUJET

Robinson s'est échoué sur une île déserte et y a rencontré un autochtone appelé Vendredi. Chacun d'entre eux doit récupérer des vivres afin de survivre. Ils ont tous deux des rendements différents et un besoin hebdomadaire précis.

Est-il intéressant pour eux de collaborer afin de passer moins de temps à récolter des vivres ?

LES RENDEMENTS / PRODUCTIVITES

<u>**Capacités de récolte de Robinson :**</u>

- 1 L d'eau en 3 h
- 1 kg de nourriture en 4 h

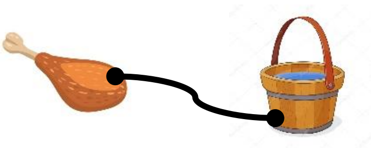
<u>**Capacités de récolte de Vendredi :**</u>

- 1 L d'eau en 2 h
- 1 kg de nourriture en 3 h

LES BESOINS HEBDOMADAIRES

Les **besoins hebdomadaires** d'un humain sont les suivants :

- **10 L** d'eau
- **6 kg** de nourriture



SEULS

Robinson et Vendredi travaillent chacun de leur côté. Ils vont donc récupérer chacun leurs besoins d'eau et de nourriture.

Rappel : leurs besoins sont de 6kg de nourriture et 10L d'eau hebdomadaire chacun.

Leurs rendements sont :

Pour Robinson : 4h/kg et 3h/L

Pour Vendredi : 3h/kg et 2h/L

Robinson : $4 \times 6 + 3 \times 10 = \mathbf{54}$ **h**

Vendredi : $3 \times 6 + 2 \times 10 = \mathbf{38}$ **h**

Total des deux temps : $54 + 38 = \mathbf{92}$ **h**

Robinson est donc plus long que Vendredi pour récupérer ses vivres. Il va prendre **16 heures** de plus que Vendredi car il est moins efficace.

À DEUX

Par la suite, nous avons réfléchi à déterminer s'il était préférable de travailler à deux avec différents cas d'égalité ou d'équité.

Les besoins pour deux sont multipliés par **2**.

Les besoins hebdomadaires à 2 sont donc pour :

- l'Eau : $2 \times 10 = \mathbf{20}$ **L**
- la Nourriture : $2 \times 6 = \mathbf{12}$ **kg**

CHACUN RECOLTE UNE RESSOURCE

Dans un premier temps, nous n'avons pas cherché à travailler dans une situation d'équité, c'est-à-dire lorsqu'ils gagnent la même proportion de temps ou d'égalité où ils gagnent le même temps. Nous avons simplement essayé un cas où ils récupèrent chacun une ressource : soit l'eau soit la nourriture.

Pour ce cas, il existe 2 possibilités :

- Robinson récupère l'eau et Vendredi la nourriture
- Robinson récolte la nourriture et Vendredi l'eau

Rappel : les capacités sont :

- Pour Robinson : 4h/kg et 3h/L
- Pour Vendredi : 3h/kg et 2h/L

- Si Robinson s'occupe de l'eau et Vendredi récolte la nourriture, nous avons :

Robinson : $3 \times 20 = \mathbf{60}$ **h**

Vendredi : $3 \times 12 = \mathbf{36}$ **h**

Le total est donc de **96 h** car 60 + 36 = 96

- Si Robinson s'occupe de la nourriture et Vendredi récolte l'eau, nous obtenons :

Robinson : $4 \times 12 = \mathbf{48}$ **h**

Vendredi : $2 \times 20 = \mathbf{40}$ **h**

Le total est donc de **88 h** car 48 + 40 = 88

Le deuxième cas est donc le meilleur car 88 < 96. On gagne ici **8 h** mais seulement **4 h** par rapport au cas où ils travaillent seuls (92h).

Malgré tout, dans les deux cas, un des deux est désavantagé par rapport à son temps seul.

Temps seuls : Robinson : 54 h ; Vendredi 38 h

Dans le premier cas, Robinson perd **6 h** et Vendredi gagne **2 h**.

Dans le deuxième cas, Robinson gagne **6 h** et Vendredi perd **2 h**.

Cette manière de séparer la récolte des ressources n'est pas efficace car seulement un des deux est gagnant. Nous cherchons donc à trouver un cas d'égalité ou d'équité.

GAIN DU MEME TEMPS

Nous avons l'objectif de trouver un cas où les deux personnes pourraient avoir une égalité par rapport à leur temps seul. Ici, nous cherchons donc à déterminer ce gain de temps. Cela permettrait aux deux de gagner du temps en fonction de leur temps seul.

Vendredi va commencer à récupérer l'eau car il est le plus rapide des deux, il récupère 1 litre en 2 heures alors qu'il faut 3 heures à Robinson pour récupérer la même quantité.

On donne $\boldsymbol{x}$ la quantité d'eau, en litres, que va récupérer Vendredi.

On met en place une expression pour Vendredi :

- Temps Vendredi = $2x$

  - $2x$ car Vendredi prend 2 heures à récupérer 1L

Puis on met en place une deuxième expression, cette fois ci pour Robinson en fonction de celle de Vendredi :

- Temps Robinson = $12 \times 4 + (20 - x) \times 3 = 48 + (20 - x) \times 3$

  - 12×4 correspond à la nourriture que va récupérer Robinson pour Vendredi et lui pour une semaine. Les besoins pour 2 personnes étant de 12 kg, il va donc récupérer le total de nourriture.
  - $(20 - x) \times 3$ correspond au reste d'eau que Vendredi n'aura pas récupéré. Les besoins pour 2 sont de 20 L, il va donc récupérer la différence de ce qu'aura récolté Vendredi. On multiplie par 3 puisque Robinson prend 3 heures à récupérer 1 litre.

On a donc 2 expressions : $2x$ et $48 + (20 - x) \times 3$

Pour rappel, on a x = la quantité d'eau récupérée par Vendredi.

Le temps pour la récupération des ressources doit être inférieur aux temps seuls.

On a donc :

$2x < 38$ → $2x$ qui est le temps mis par Vendredi pour récupérer l'eau, doit être inférieur à 38 heures, le temps individuel de Vendredi.

On trouve $x < 19$

Puis :

$48 + 3(20 - x) < 54$ car $48 + 3(20 - x)$ correspond au temps de récolte de Robinson à 2 et qui donc être inférieur à son temps seul, qui est de 54 heures.

En résolvant l'équation, on trouve :

$48 + 60 - 3x < 54$

$108 - 3x < 54$

$-3x < -54$

$\boldsymbol{x > 18}$

On découvre que $18 < x < 19$, x appartient à l'intervalle $]18; 19[$

Vendredi doit récupérer entre **18** et **19** litres d'eau. Robinson récupérera donc la totalité de la nourriture ainsi que le reste d'eau, c'est-à-dire entre 1 et 2 litres d'eau.

Nous mettons en place un système de deux équations à deux inconnues pour trouver la valeur exacte de x, la quantité d'eau à récupérer.

$$\left.\begin{cases} 2x = 38 - a \\ 48 + 3(20 - x) = 54 - a \end{cases}\right\}$$

Avec a correspondant au gain de temps, qui doit être égal pour les deux

Tout d'abord, en isolant a dans la première équation, on obtient :

$2x = 38 - a$

$a + 2x = 38$

$a = -2x + 38$

Puis, on trouve le x grâce à la deuxième équation :

$48 + 3(20 - x) = 54 - a$

$48 + 3(20 - x) = 54 - (-2x + 38)$

$48 + 60 - 3x = 54 + 2x - 38$

$-3x + 108 = 2x + 16$

$108 - 16 = 2x + 3x$

$92 = 5x$

$x = \frac{92}{5}$

$x = 18{,}4$

En résolvant le système d'équations, on obtient donc : $x = 18{,}4$ qui correspond à la quantité d'eau en litre à récupérer. Ici, Vendredi doit donc récupérer 18,4 L.

En remplaçant x, on trouve :

$\boldsymbol{a} = -2 \times 18{,}4 + 38 = \mathbf{1{,}2\ h}$

Le résultat est **1,2 heure**, ce qui correspond à **1 h 12 min**.

Vendredi et Robinson gagnent **1,2 heure (1h12min)** chacun par rapport à leurs temps seuls, qui sont respectivement, 38 heures et 54 heures.

GAIN D'UNE MEME PROPORTION DE TEMPS

Ils gagnent tous les deux la même proportion de temps par rapport à leur temps seul.

Nous choisissons ici d'expérimenter un nouvel aspect de nos problèmes en utilisant un cas d'équité.

Pour rappel, le temps seul de Vendredi est de **38 h** et de **54 h** pour Robinson.

Les besoins hebdomadaires à deux sont de **20 L** et **12 kg**.

En utilisant les expressions du cas où ils remportent le même gain de temps.

Nous avons défini :

A1 = gain de temps de Robinson $= 54 - (48 + (20 - x) \times 3)$

A2 = gain de temps de Vendredi $= 38 - 2x$

Et nous voulons :

$$\frac{A1}{54} = \frac{A2}{38}$$

- ➔ car nous voulons que ces 2 gains de temps soient proportionnels par rapport à leur temps seuls.

En remplaçant A1 et A2, on a :

$$\frac{54 - (48 + (20 - x) \times 3)}{54} = \frac{38 - 2x}{38}$$

En résolvant cette équation, on trouve :

$$\frac{54 - 108 + 3x}{54} = \frac{38 - 2x}{38}$$

$$\frac{-54 + 3x}{54} = \frac{38 - 2x}{38}$$

$$38(3x - 54) = 54(38 - 2x)$$

$$114x - 2052 = 2052 - 108x$$

$$222x = 4104$$

$$x = \frac{4104}{222} \approx 18{,}486$$

On obtient :

$$\boldsymbol{x \approx 18{,}486}$$

On remplace le x dans les 2 équations avec la valeur trouvée.

Donc $A1 = 54 - \left(48 + 3 \times (20 - 18{,}486)\right) = \mathbf{1{,}458}$

Et $A2 = 38 - 2 \times 18{,}486 = \mathbf{1{,}028}$

En calculant le quotient de ces deux résultats par les temps seuls respectifs, <u>on obtient :</u>

$$\frac{A1}{54} = \frac{1{,}458}{54} = 0{,}027$$

$\rightarrow 0{,}027 \times 100 = \mathbf{2{,}7}\%$

$$\frac{A2}{38} = \frac{1{,}028}{38} = 0{,}027$$

$\rightarrow 0{,}027 \times 100 = \mathbf{2{,}7}\%$

En cherchant l'équité, ils peuvent donc réduire leur temps de travail respectif de **2,7 %.**

$$54 \times \left(1 - \frac{2{,}7}{100}\right) = \mathbf{52{,}542}\boldsymbol{h}$$

$$38 \times \left(1 - \frac{2{,}7}{100}\right) = \mathbf{36{,}974}\boldsymbol{h}$$

Robinson va travailler **1,458 heure**, ce qui correspond à **1h 27 min**, en moins par rapport à son temps de récolte seul car $54 - 52{,}542 = 1{,}458$.

Quant à Vendredi, il va travailler **1,026 heure**, ce qui correspond à **1h 02 min**, en moins par rapport à son temps seul car $38 - 36{,}974 = 1{,}026$.

TRAVAIL A TEMPS EGAUX

Nous avons décidé d'exprimer la quantité d'eau et de nourriture que doivent produire Robinson et Vendredi à partir d'une des quatre quantités puis de faire varier celle-ci afin d'en déduire les 3 autres à l'aide d'un programme Python.

Nous avons ensuite tracé un graphique représentant le temps de travail des deux hommes en fonction d'une quantité de nourriture qui nous a permis d'en déduire une tendance et de trouver le temps le plus avantageux.

<u>Rappel :</u> Les besoins sont **12kg** de nourriture et **20L** d'eau à deux par semaine.

On peut donc écrire :

$$Quantité\ Eau\ Vendredi = 20 - Quantité\ Eau\ Robinson$$

Et

$$Quantité\ Nourriture\ Vendredi = 12 - Quantité\ Nourriture\ Robinson$$

D’après ces équations si on a la quantité d’eau ou de nourriture de l’un on peut avoir celle de l’autre.

On souhaite qu’ils travaillent tous les deux le même temps, on recherche à avoir :

$$Temps\ Travail\ Robinson = Temps\ Travail\ Vendredi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &Temps\ Eau\ Robinson\ + Temps\ Nourriture\ Robinson \\ &= Temps\ Eau\ Vendredi + \ Temps\ Nourriture\ Vendredi \end{aligned}$$

D’après les rendements on a :

$Quantité\ Eau\ Robinson\ \times\ 3\ =\ Temps\ Eau\ Robinson$

$Quantité\ Nourriture\ Robinson\ \times\ 4\ =\ Temps\ Nourriture\ Robinson$

$Quantité\ Eau\ Vendredi\ \times\ 2\ =\ Temps\ Eau\ Vendredi$

$Quantité\ Nourriture\ Vendredi\ \times\ 3\ =\ Temps\ Nourriture\ Vendredi$

En remplaçant les mots par des abréviations, on obtient :

$QER\ \times\ 3\ +\ TNR = QEV \times 2 + TNV$

$QER\ \times\ 3\ +\ TNR = (20 - QER) \times 2 + TNV$

$QER\ \times\ 3\ +\ TNR = 40 - 2QER + TNV$

$QER\ \times\ 5 = 40 + TNV - TNR$

$QER\ = \dfrac{(TNV\ +\ 40 - TNR)}{5}$

Ce qui correspond à :

$$Quantité\ Eau\ Robinson =$$

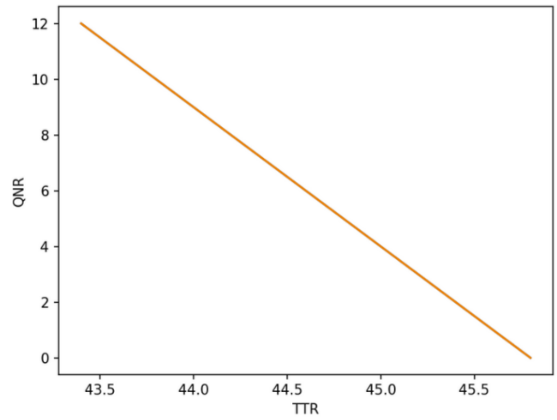
$$\frac{(Temps\ Nourriture\ Vendredi\ +\ 40 - Temps\ Nourriture\ Robinson)}{5}$$

```
for QNR in range (13):
    QNV=12-QNR
    TNR=QNR*4
    TNV=QNV*3
    QER=(TNV+40-TNR)/5
    QEV=20-QER
    TER=QER*3
    TEV=TNR+TER-TNV
    QNV=TNV/3
    QNR=TNR/4
    TTR=TER+TNR
    QNR=QNR+1


TTR=[45.800000000000004,45.599999999999994,45.400000000000006,45.2,45.0,44.8,44.599999999999994,44.4,44.2,44.0,43.8,43.6,43.4]
QNR=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure
plt.plot (TTR,QNR)
plt.show ()

plt.xlabel ("TTR")
plt.ylabel ("QNR")
```

Lorsque l'on fait varier la quantité de nourriture récupérée par Robinson (QNR), nous pouvons observer que plus cette quantité est importante, moins ils travailleront longtemps.



On considère ensuite que Robinson récupère toute la nourriture et Vendredi toute l'eau puis on équilibre les temps de travail en enlevant des ressources à récupérer à celui qui travaille plus pour les mettre à celui qui travaille moins.

On trouve **43,42.**

Ils travaillent donc chacun **43,42 heures**, correspondant à **43h 25 min.**

Ce cas est donc avantageux pour Robinson qui travaillera 10,58 h (10h 35min) en moins mais pas pour Vendredi qui devra travailler 5,42 h (5h 25min) en plus qu'en étant seul.

À TROIS

Nous avons ensuite décidé d'ajouter une troisième personne après avoir travaillé sur les différents cas à deux vu précédemment.

La troisième personne ajoutée ce surnomme Steven et à des capacités de récolte, qui sont différentes de celles de Robinson et Vendredi. Ses rendements sont :

- 1 L d'eau en 1 h
- 1 kg de nourriture en 5 h

Les besoins pour trois seront ici de :

- **30 L** car $10 \times 3 = 30$
- **18 kg** car $6 \times 3 = 18$

Pour que le temps soit minimal, il faut qu'ils travaillent le même temps. On obtient donc :

1) $TER + TNR = TEV + TNV = TES + TNS$

Correspondant aussi à :

1) $QNR \times 4 + QER \times 3 = QNV \times 3 + QEV \times 2 = QNS \times 5 + QES$

À l'aide d'un programme Python, on va tester tous les cas possibles. On fait alors varier 2 quantités de nourriture avec le programme pour en déduire la troisième grâce à un complément à 18, ce qui correspond à la quantité de nourriture, en kg, nécessaire pour les 3 personnages pour une semaine.

On trouve l'équation suivante :

2) $18 = QNR + QNV + QNS$

$QNS = 18 - QNR - QNV$

Et on obtient l'équation correspondante à la récolte d'eau :

3) $30 = QER + QEV + QES$

On cherche à exprimer les quantités d'eau en fonction de la nourriture.

On cherche à exprimer QER en fonction de QEV et des quantités de nourriture pour pouvoir remplacer dans l'équation 3.

Puis, on prend une partie de l'équation 1, on a :

$QNR \times 4 + QER \times 3 = QNV \times 3 + QEV \times 2$

$QER \times 3 = QNV \times 3 + QEV \times 2 - QNR \times 4$

$QER = \dfrac{QNV \times 3 + QEV \times 2 - QNR \times 4}{3}$

On veut aussi exprimer QES en fonction de QEV et des quantités de nourriture pour pouvoir remplacer dans l'équation 3.

On prend une partie de l'équation 1, on a :

$QNV \times 3 + QEV \times 2 = QNS \times 5 + QES$

$QES = 3 \times QNV + 2 \times QEV - QNS \times 5$

Maintenant on remplace dans l'équation 3, on a :

$QEV + QER + QES = 30$

$QEV + \dfrac{QNV \times 3 + QEV \times 2 - QNR \times 4}{3} + 3 \times QNV + 2 \times QEV - QNS \times 5 = 30$

$\dfrac{QEV \times 3 + QNV \times 3 + QEV \times 2 - QNR \times 4 + 9 \times QNV + 6 \times QEV - 15 \times QNS}{3} = \dfrac{90}{3}$

<u>Donc, on a :</u>

$QEV \times 3 + QNV \times 3 + QEV \times 2 - QNR \times 4 + 9 \times QNV + 6 \times QEV - 15 \times QNS = 90$

$11 \times QEV + 12 \times QNV - 4 \times QNR - 15 \times QNS = 90$

$11 \times QEV = -12 \times QNV + 4 \times QNR + 15 \times QNS + 90$

$QEV = \dfrac{-12 \times QNV + 4 \times QNR + 15 \times QNS + 90}{11}$

On peut donc exprimer QEV en fonction des quantités de nourriture. On peut aussi déterminer QER en fonction de QEV et de la nourriture (Eq 1). On peut déterminer QES par l'équation 3.

En conclusion, avec $\frac{2}{3}$ des quantités de nourriture on peut avoir le 3ème par l'équation 2 puis les 3 quantités d'eau par les équations 2 et 1.

À partir de deux quantités d'eau on peut donc en déduire la troisième. À l'aide de notre programme Python, on fait varier ces quantités afin de trouver différents cas possibles où les temps seraient les mêmes. Nous cherchons les cas optimaux.

```python
def personnes3 ():      #S'il y a 3 personnes et qu'ils travaillent le même temps (S 5h/kg de nourriture et 1h/kg d'eau)
    MIN=100
    for QNR in range (0,1801):#Il y a au minimum 2 inconnues, on teste donc le programme pour toutes les valeurs possibles
        QNR=QNR/100
        for QNV in range (1):
            QNV=QNV/100

            QNS=18-QNR-QNV #On exprime la 3ème valeur de la nourriture en fonction des 2 inconnues
            QEV=(90+4*QNR-12*QNV+15*QNS)/11 #On exprime une quantité d'eau en fonction des 3 quantités de nourriture
            QER=(-QNR*4+QNV*3+QEV*2)/3 #On exprime une 2ème quantité d'eau
            QES=3*QNV+2*QEV-5*QNS #On en deduit la 3ème
            TTR=QNR*4+QER*3
            TTV=QNV*3+QEV*2
            TTS=QNS*5+QES
            QNT=QNR+QNV+QNS
            QET=QES+QEV+QER
            if TTS<MIN and QNV+QNR<=18 and QNV>=0 and QNR>=0 and QEV>=0 and  QER>=0 and QES>=0 and QES+QEV+QER<=30 :
                #Si les valeurs correspondent à nos critères on les conserve, on prend ensuite la plus petite
                MIN=TTS
                MTTS=TTS
                MQES=QES
                MQEV=QEV
                MQER=QER
                MQNR=QNR
                MQNS=QNS
                MQNV=QNV
    return ("/Mttr=",MTTS,"/=qev",MQEV,"/qer=",MQER,"/qes=",MQES,"/qNv=",MQNV,"/qNr=",MQNR,"/qNs=",MQNS)
```

```
personnes3()
```

```
('/Mttr=', 30.64272727272727, '/=qev', 0.006363636363634129, '/qer=', 0.0009090909090900823, '/qes=', 29.992727272727276, '/qbv
=', 10.21, '/qbr=', 7.66, '/qbs=', 0.129999999999999)
```

Les valeurs des quantités d'eau et de nourriture que chacun doit récolter pour que le temps de travail des 3 soit égal est le plus faible possible. Il existe une infinité de possibilités car les différentes variables de quantité et de productivité peuvent prendre de nombreuses valeurs et changent.

CONCLUSION

Nous avons donc trouvé différentes possibilités d'optimisation : certains cas permettent l'équité et d'autres l'égalité. Ils peuvent soit gagner la même quantité de temps, soit gagner la même proportion de temps ou encore travailler le même temps même si cela n'est pas avantageux pour les deux.

Nous avons donc trouvé 2 cas où ils sont tous les deux gagnants en coopérant.

Après avoir trouvé différentes possibilités nous avons ajouté un troisième personnage ayant des rendements différents et nous avons calculé de manière à ce qu'ils travaillent le même temps.

Afin de mieux visualiser notre projet, un de nos professeurs nous a conçu un programme représentant la progression des récoltes.

Et nous avons l'objectif d'ajouter une quatrième personne qui aurait des rendements différents. Par exemple, cette personne que l'on pourra nommer Maxime, récupèrera 1L d'eau en 2h et 1kg de nourriture en 3h. Cela permettra de complexifier les calculs et équations.